Решения задач по курсу "теория случайных процессов"

Леонтьев Н.Д.

1. Для случайного процесса с независимыми и однородными по времени приращениями вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию.

Решение: Обозначим исходный случайный процесс за $\{X(t), t \geq 0\}$ и введём дополнительно процесс $\{Y(t) = X(t) - X(0), t \geq 0\}$. Легко проверить, что $\{Y(t), t \geq 0\}$ — процесс Леви. Обозначим $\mathbf{E}(Y(t)) = a(t)$. Тогда, очевидно, выполнено

$$a(t+s) = a(t) + a(s), t, s \geq 0 \tag{1}$$

Математическое ожидание процесса Леви является монотонной функцией, что в совокупности с (1) влечёт равенство $a(t) = ct$[1]. Константу легко найти, подставив $t = 1$. Итак, окончательно $\mathbf{E}(Y(t)) = t\mathbf{E}(Y(1))$.

Формула для дисперсии получается совершенно аналогичным образом.

Выведем формулу для ковариационной функции процесса $\{Y(t), t \geq 0\}$[2]. Будем считать, что $t \geq s$. Имеем

$$\begin{gathered} cov(Y(t), Y(s)) = \mathbf{E}(Y(t)Y(s)) - \mathbf{E}(Y(t))\mathbf{E}(Y(s)) = \\ = \mathbf{E}((Y(t)-Y(s)+Y(s))Y(s)) - \mathbf{E}(Y(t))\mathbf{E}(Y(s)) = \mathbf{E}(Y(t)-Y(s))\mathbf{E}(Y(s)) + \\ + \mathbf{E}(Y(s))^2 - \mathbf{E}(Y(t))\mathbf{E}(Y(s)) = \mathbf{E}(Y(s))^2 - (\mathbf{E}(Y(s)))^2 = \mathbf{D}(Y(s)) \end{gathered}$$

Переход к моментам исходного процесса не представляет трудности и предоставляется читателю.

2. Случайный процесс $\xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, где ω — неслучайная константа, A и φ независимы, $\mathbf{E}(A) = m, \mathbf{D}(A) = \sigma^2$, φ равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$[3]. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для $\xi(t)$. Доказать, что это стационарный в широком смысле случайный процесс.

Решение: Вычислим сначала математическое ожидание:

$\mathbf{E}(\xi(t)) = \mathbf{E}(A)\mathbf{E}(\cos(\omega t + \varphi)) = 0$, что нетрудно установить непосредственным подсчётом второго множителя.

[1] Доказательство этого утверждения выходит за рамки курса

[2] Всюду в тексте вычисляются ковариационные функции. Переход к корреляционным функциям делается известным образом и предоставляется читателю

[3] По-видимому, в исходном списке задач опечатка

Теперь найдём ковариационную функцию:

$$K(t,s) = cov(\xi(t),\xi(s)) = \mathbf{E}(\xi(t)\xi(s)) - \mathbf{E}(\xi(t))\mathbf{E}(\xi(s)) = \mathbf{E}(\xi(t)\xi(s)) =$$
$$= \mathbf{E}(A^2)\mathbf{E}(\cos(\omega t+\varphi)\cos(\omega s+\varphi)) = \frac{m^2+\sigma^2}{2}\cos(\omega(t-s))$$

Последнее равенство получается непосредственным вычислением с использованием известных тригонометрических формул.

Чтобы получить выражение для дисперсии, достаточно подставить в ковариационную функцию $s = t$.

Стационарность процесса в широком смысле вытекает из вида математического ожидания и ковариационной функции.

3. Пусть $W(t)$ — стандартный винеровский процесс. Доказать, что он непрерывен в среднем квадратическом, но не является дифференцируемым в среднем квадратическом.

Решение: было приведено на лекциях.

4. $\xi(t)$ — пуассоновский процесс, $\eta(t) = \int_0^t \xi(s)ds$ Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для $\eta(t)$.

Решение: Пуассоновский процесс $\{\xi(t), t \geq 0\}$ непрерывен в среднем квадратическом. Действительно,

$$\mathbf{E}|\xi(t+s)-\xi(t)|^2 = \mathbf{E}|\xi(s)|^2 = \lambda^2 s^2 + \lambda s \to 0, s \to 0$$

Для вычисления искомых моментов достаточно применить формулы, которые были приведены на лекциях $[t \geq s]$:

$$\mathbf{E}(\eta(t)) = \int_0^t \mathbf{E}(\xi(s))ds = \frac{\lambda t^2}{2};$$

$$cov(\eta(t),\eta(s)) = \int_0^t\int_0^s K_\xi(u,v)dudv = \int_0^t\int_0^s \lambda\min(u,v)dudv = \frac{\lambda s^2}{6}[3t-s];$$

$$\mathbf{D}(\eta(t)) = \frac{\lambda t^3}{3}.$$

5. Пусть $W(t)$ — стандартный винеровский процесс, $\xi_1 = \int_0^\pi \cos(t)dW(t)$, $\xi_2 = \int_0^\pi \sin(t)dW(t)$. Найти: $\mathbf{E}(\xi_1), \mathbf{E}(\xi_2), \mathbf{D}(\xi_1), \mathbf{D}(\xi_2), cov(\xi_1,\xi_2)$.

Решение: Пользуясь приведёнными на лекциях свойствами стохастического интеграла, получим

$$\mathbf{E}(\xi_1) = \mathbf{E}(\xi_2) = 0;$$

$$\mathbf{D}(\xi_1) = \mathbf{E}(\xi_1)^2 = \int_0^\pi \cos^2(t)dt = \frac{\pi}{2}, \mathbf{D}(\xi_2) = \mathbf{E}(\xi_2)^2 = \int_0^\pi \sin^2(t)dt = \frac{\pi}{2};$$

$$cov(\xi_1,\xi_2) = \mathbf{E}(\xi_1\xi_2) = \int_0^\pi \sin(t)\cos(t)dt = 0.$$

6. Корреляционная функция стационарного процесса равна $R(\tau) = \exp(-\tau^2)$. Найти спектральную плотность $f(\lambda)$. Обратно, дана спектральная плотность $f(\lambda) = \exp(-|\lambda|)$, найти $K(\tau)$.

Решение: Задача состоит в вычислении обратного и прямого преобразования Фурье соответственно. Результаты вычислений принимают вид

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}, K(\tau) = \frac{2}{\tau^2+1}$$

Вычислений можно избежать, заметив сходство исходных функций с характеристической функцией нормального распределения и плотностью распределения Лапласа соответственно.

7. Пусть $W(t)$ — стандартный винеровский процесс, $h(\tau) = \exp(-\tau), \tau > 0, \xi(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-s)W(s)ds$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для такого процесса. То же самое для процесса $\eta(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-s)dW(s)$.

Решение: Заметим сразу, что значения обоих интегралов не изменятся, если верхний предел взять равным бесконечности.

Вычисление всех моментов основывается на приведённых на лекциях свойствах интеграла Римана от случайного процесса и стохастического интеграла. В силу результата задачи №3 винеровский процесс непрерывен в среднем квадратическом, поэтому $[t_1 \leq t_2]$

$$\mathbf{E}(\xi(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(h(t-s)W(s))ds = 0;$$

$$\begin{aligned}
cov(\xi(t_1), \xi(t_2)) &= cov\left(\int_{-\infty}^{t_1} h(t_1-s_1)W(s_1)ds_1, \int_{-\infty}^{t_2} h(t_2-s_2)W(s_2)ds_2\right) = \\
&= \exp(-(t_1+t_2))cov\left(\int_{-\infty}^{t_1} \exp(s_1)W(s_1)ds_1, \int_{-\infty}^{t_2} \exp(s_2)W(s_2)ds_2\right) = \\
&= \exp(-(t_1+t_2)) \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2} \exp(s_1+s_2)K_W(s_1,s_2)ds_1ds_2 = \\
&= \exp(-(t_1+t_2)) \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2} \exp(s_1+s_2)\min(s_1,s_2)ds_1ds_2 = \\
&= t_1 - 1 - \frac{1}{2}e^{t_1-t_2};
\end{aligned}$$

$$\mathbf{D}(\xi(t)) = t - \frac{3}{2};$$

$$\mathbf{E}(\eta(t)) = 0;$$

$$cov(\eta(t_1), \eta(t_2)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1-s)h(t_2-s)ds = \frac{1}{2}e^{t_1-t_2};$$

$$\mathbf{D}(\eta(t)) = \frac{1}{2}.$$

8. Найти наилучшую линейную оценку для случайной величины η в пространстве случайных величин $L = \{\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2\}$, где ξ_1, ξ_2 — фиксированные случайные величины, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1, \mathbf{E}(\xi_1) = \mathbf{E}(\xi_2) = \mathbf{E}(\eta) = 0, \mathbf{D}(\xi_1) = \mathbf{D}(\eta) = 1, \mathbf{D}(\xi_2) = 4, cov(\xi_1, \xi_2) = -1, cov(\xi_1, \eta) = 0.5, cov(\xi_2, \eta) = 1$.

Решение: В соответствии с леммой о перпендикуляре, будем искать такую оценку $\widehat{\eta} \in L$, что

$$(\eta - \widehat{\eta}, \xi) = 0 \ \forall \xi \in L \tag{2}$$

Пусть $\widehat{\eta} = \widehat{\alpha}_1\xi_1 + \widehat{\alpha}_2\xi_2, \xi = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$. Перепишем соотношение (2) в терминах математических ожиданий[4]:

$$\begin{aligned}(\eta - \widehat{\eta}, \xi) = \mathbf{E}[(\eta - \widehat{\eta})\xi] = \mathbf{E}[(\eta - \widehat{\alpha}_1\xi_1 - \widehat{\alpha}_2\xi_2)(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2)] = \\ = \alpha_1\mathbf{E}(\xi_1\eta) + \alpha_2\mathbf{E}(\xi_2\eta) - \widehat{\alpha}_1\alpha_1\mathbf{E}(\xi_1)^2 - \widehat{\alpha}_1\alpha_2\mathbf{E}(\xi_1\xi_2) - \alpha_1\widehat{\alpha}_2\mathbf{E}(\xi_1\xi_2) - \widehat{\alpha}_2\alpha_2\mathbf{E}(\xi_2)^2 = \\ = 0.5\alpha_1 + \alpha_2 - \widehat{\alpha}_1\alpha_1 + \widehat{\alpha}_1\alpha_2 + \alpha_1\widehat{\alpha}_2 - 4\widehat{\alpha}_2\alpha_2\end{aligned}$$

Подставляя вместо (α_1, α_2) поочерёдно $(1, 0), (0, 1)$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 + \widehat{\alpha}_1 - 4\widehat{\alpha}_2 = 0; \\ 0.5 - \widehat{\alpha}_1 + \widehat{\alpha}_2 = 0. \end{cases}$$

Решением данной системы будет пара $\widehat{\alpha}_1 = 1, \widehat{\alpha}_2 = 0.5$. Таким образом, окончательный ответ: $\widehat{\eta} = \xi_1 + 0.5\xi_2$.

9. Стационарная последовательность $\xi(n)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda) = 10 + 6\cos(\lambda) = |3 + e^{-i\lambda}|^2$. По наблюдениям $\xi(n), n \leq 0$, найти оптимальный линейный прогноз на один шаг вперёд.

Решение: Будем действовать в соответствии с приведённым на лекциях алгоритмом:

1) Спектральная плотность уже представлена в виде $f(\lambda) = |f_1(\lambda)|^2$, $f_1(\lambda) = 3 + e^{-i\lambda} \in L_{\leq 0}$;

2) $h_1 f_1(\lambda) = e^{i\lambda}(3 + e^{-i\lambda}) = 1 + 3e^{i\lambda}$;

3) $h_1 f_1(\lambda) = k_1 + k_2$, где $k_1 = 1 \in L_{\leq 0}, k_2 = 3e^{i\lambda} \in L_{>0}$;

4) Находим $g(\lambda) = \sum_{n\leq 0} \widehat{c}_n e^{in\lambda}$ из уравнения $g(\lambda)f_1(\lambda) = k_1$.

Решение уравнения предоставляется читателю.

5) Оптимальный прогноз имеет вид

$$\widehat{\xi}(1) = \sum_{n\leq 0} \widehat{c}_n \xi_n = -\sum_{n\leq 0} (-3)^{n-1}\xi(n)$$

10. Случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi(t) = e^{-t}\xi(t)dt + d\eta(t), t \geq 0.$$

[4]Так как все заданные моменты вещественны, можно считать, что все случайные величины также вещественны

Найти общий вид решения этого уравнения.

Решение: Согласно формуле, приведённой на лекциях, общее решение уравнения имеет вид:

$$\xi(t) = W(t,0)\xi(0) + \int_0^t W(t,s)d\eta(s),$$

где $W(t,s)$ есть фундаментальное решение:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}W(t,s) = e^{-t}W(t,s), t > s; \\ \hfill W(s,s) = 1. \end{cases}$$

Решив уравнение для $W(t,s)$, получим искомое общее решение стохастического дифференциального уравнения:

$$\xi(t) = \exp(1 - e^{-t})\xi(0) + \int_0^t \exp(e^{-s} - e^{-t})d\eta(s)$$

11, 12. Задачи соответствуют материалу, который не был прочитан на лекциях.

13. Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda) = \exp(-|\lambda|)$. Доказать, что этот процесс является дифференцируемым в среднем квадратическом и найти корреляционную функцию для производной.

Решение: Известно, что условие $\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 f(\lambda)d\lambda < \infty$ является необходимым и достаточным для существования производной в среднем квадратическом у стационарного процесса[5]. Таким образом, первая часть задачи сводится к непосредственному подсчёту интеграла, который предоставляется читателю.

Теперь воспользуемся приведённым на лекциях соотношением, связывающим спектральную плотность стационарного процесса и его линейного преобразования: $f_1(\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)$, где $\varphi(\lambda)$ — спектральная характеристика линейного преобразования, которая в данном случае равна $i\lambda$. Итак, $f_1(\lambda) = \lambda^2 e^{-|\lambda|}$. Искомая ковариационная функция является преобразованием Фурье найденной спектральной плотности. Вычисление интеграла даёт

$$K_1(t) = -\frac{4[3t^2 - 1]}{(t^2+1)^3}$$

14. $\xi(t)$ есть стационарный случайный процесс. Рассмотрим новый случайный процесс $\xi(t) + \xi'(t)$. Доказать, что это линейное преобразование и найти его спектральную характеристику.

Решение: Первая часть утверждения была доказана на лекциях. Искомая спектральная характеристика, очевидно, примет вид $\varphi(\lambda) = 1 + i\lambda$.

[5] Утверждение было приведено на лекциях без доказательства